

Sand Stat, 5.aflevering

ldg790 - Christian B. Gustafson

Oktober 2020

1.

Ud fra matricen kan vi se at, variansen af $x_1 = 2$ og variansen af $x_2 = 3$ og kovariansen af $X_1, X_2 = 1$ dvs:

$$\begin{aligned} \text{cov}(Y_1, Y_2) &= \text{Cov}(-a + X_1 - bX_2, X_2) \Leftrightarrow \\ \text{cov}(x_1, x_2) + \text{Cov}(-bX_2, X_2) &= \text{Cov}(X_1, X_2) - b\text{Cov}(X_2, X_2) \Leftrightarrow \\ 1 - b3 &= 0 \Rightarrow b = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2.

$$E[Y_1] = E[-a + X_1 - bX_2] = -a + E[X_1] - b * E[X_2]$$

Indsætter:

$$E[Y_1] = -\frac{7}{3} + 2 - \frac{1}{3} \cdot (-1) = 0$$

3.

Vi gør følgende for først at beregne middelværdi:

$$E(Y_1) = E[-a + X_1 - bX_2] = -a + E[X_1] - b * E[X_2]$$

Indsætter og vi får:

$$E(Y_1) = -\frac{7}{3} + 2 - \frac{1}{3} \cdot (-1) = 0$$

$$E(Y_2) = E[0 + X_2] = E[X_2] = -1$$

Nu til variansen:

$$V[Y_1] = V[-a + X_1 - bX_2] = V[X_1 - bX_2]$$

$$= V[X_1] - b^2 \cdot V[X_2] - 2 \cdot \frac{1}{3} Cov(X_1, X_2)$$

Indsætter tal:

$$V[Y_1] = 2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

For den anden får vi følgende:

$$V[Y_2] = V[Y_2] = V[0 + X_2] = V[X_2] = 3$$

4.

Generelt har vi at uafhængighed mellem Y_1 og Y_2 medfører $Cov(Y_1, Y_2) = 0$ men ikke omvendt. I spørgsmål 1 fandt vi netop ud af, at covariansen er lig 0 når b er lig $1/3$. Dvs. at Y_1 og Y_2 er uafhængige når $b=1/3$. Dette gælder kun hvis variablerne er normalfordelte, hvilket vi i opgaveteksten fik angivet der er.

5.

Benytter noten af Rahbek "On conditional expectations" afsnit 4 "Property G.3".

$$(X_1|X_2 = x) \approx N(\mu_{X_1|X_2}, \sigma_{X_1|X_2}^2)$$

i)

$$\begin{aligned} E(X_1|X_2 = x) &= \mu_{X_1|X_2} = \mu_{X_1} + \frac{\sigma_{X_1X_2}}{\sigma_{X_2}^2}(x - \mu_{X_2}) \Rightarrow \\ 2 + \frac{1}{3}(x + 1) &= 2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} + \frac{1}{3}x \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} Var(X_1|X_2 = x) &= \sigma_{X_1|X_2}^2 = \sigma_{X_1}^2 - \frac{\sigma_{X_1X_2}^2}{\sigma_{X_2}^2} \Rightarrow \\ 2 - \frac{1^2}{3} &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Den betingede fordeling er dermed:

$$(X_1|X_2 = x) \approx N\left(\frac{7}{3} + \frac{1}{3}x, \frac{5}{3}\right)$$

6.

Vi starter med at finde udtrykket for X_1 bruger vi de to udtryk for Y_1 og Y_2 med $b = 1/3$ og $a = 7/3$ og isolerer X_1 :

$$Y_1 = -\frac{7}{3} + X_1 - \frac{1}{3}X_2$$

$$Y_2 = X_2$$

$$X_1 = \frac{7}{3} + X_2 + Y_1$$

I noten af Rahbek side 10 ser vi at man kan omskrive $Y = \alpha + \beta X + \epsilon$ til:

$$Y = (\mu_Y - \frac{\sigma_{YX}}{\sigma_X^2}) + \frac{\sigma_{YX}}{\sigma_X^2}X + \epsilon$$

Nu omskriver vi $Y = X_1$ og $X = X_2$:

$$X_1 = (\mu_{X_1} - \frac{\sigma_{X_1X_2}}{\sigma_{X_2}^2}) + \frac{\sigma_{X_1X_2}}{\sigma_{X_2}^2}X_2 + \epsilon$$

Indsætter:

$$(2 - \frac{1}{3} \cdot (-1)) + \frac{1}{3}X_2 + \epsilon = \frac{7}{3} + \frac{1}{3}X_2 + \epsilon$$

Vi ved fra tidligere spørgsmål at Y_1 og Y_2 er uafhængige, ser vi nu på hvordan X og ϵ kan svare til hhv. Y_2 og Y_1 : Fordi at $X = X_2$ og $Y_2 = X_2$ må $X = Y_2$. Vi ved at ϵ er normalfordelt med $E(\epsilon) = 0$ og $Var(\epsilon) = \sigma_{Y|X}^2 = \sigma_{X_1|X_2}^2 = \frac{5}{4}$, dermed kan vi erstatte dette med Y_1 , fordi at vi ved fra spørgsmål 2, at $E(Y_1) = 0$ for $a = 7/3$ og $b = 1/3$ og i spørgsmål 3 har vi vist, at $Var(Y_1) = \frac{5}{3}$. Det betyder at X og ϵ må være uafhængige.