

Sand Stat, 2.aflevering

ldg790 - Christian B. Gustafson

September 2020

Opgave 1

1

For at finde den marginale fordeling gør vi følgende:

$$fx_m(0) = P(X_m = 0)0.01 + 0.02 + 0.05 = 0.08$$

Altså er den marginale fordeling for $X_m = 0.08$ Det samme gør vi for resten:

$$fx_m(20) = P(X_m = 20)0.00 + 0.06 + 0.06 = 0.12$$

$$fx_m(40) = P(X_m = 40)0.10 + 0.20 + 0.50 = 0.80$$

Nu for X_k :

$$fx_k(0) = P(X_k = 0) = 0.01 + 0.00 + 0.10 = 0.11$$

$$fx_k(20) = P(X_k = 20) = 0.02 + 0.06 + 0.20 = 0.28$$

$$fx_k(40) = P(X_k = 40) = 0.05 + 0.06 + 0.55 = 0.61$$

Følgende tabel angiver sandsynlighedsfunktionerne for de marginale fordelinger af X_k og X_m :

x	0	20	40
$fX_m(x)$	0.08	0.12	0.8
$fX_k(x)$	0.11	0.28	0.61

2

Vi udregner nu middelværdi ved følgende:

$$E(X_m) = 0 \cdot 0.08 + 20 \cdot 0.12 + 50 \cdot 0.80 = 34.4$$

$$E(X_k) = 0 \cdot 0.11 + 20 \cdot 0.28 + 50 \cdot 0.61 = 30$$

For at beregne varians skal vi først finde følgende:

$$E(X_m^2) = 0^2 \cdot 0.08 + 20^2 \cdot 0.12 + 50^2 \cdot 0.80 = 1328$$

$$E(X_k^2) = 0^2 \cdot 0.11 + 20^2 \cdot 0.28 + 40^2 \cdot 0.61 = 1088$$

Variansen beregner vi ved:

$$\text{var}(X_m) = E(X_m^2) - (E(X_m))^2 \Rightarrow$$

$$1328 - 34.4^2 = 144,64$$

$$\text{var}(X_k) = E(X_k^2) - (E(X_k))^2 \Rightarrow$$

$$1088 - 30^2 = 188$$

3

Vi beregner korrelationen ved først at beregne kovariansen:

$$E(X_k X_m) = 20 \cdot 20 \cdot 0.06 + 20 \cdot 40(0.06 + 0.2) + 40 \cdot 40 \cdot 0.5 = 1032$$

Altså er kovariansen mellem X_m og X_k :

$$\text{Cov}(X_k, X_m) = E(X_k X_m) - E(X_k)E(X_m) = 1032 - 30 \cdot 34.4 = 0$$

Altså er korrelationen lig 0 eftersom:

$$\rho_{X_k, X_m} = \frac{\text{Cov}(X_k, X_m)}{\sqrt{\text{Var}(X_k)\text{Var}(X_m)}}$$

4

For at beregne dette benytter vi følgende:

$$P(X_k = 0 | X_m = 0) = \frac{P(X_k = 0, X_m = 0)}{f(X_m = 0)} = \frac{0.01}{0.08} = \frac{1}{8}$$

$$P(X_k = 20 | X_m = 0) = \frac{P(X_k = 20, X_m = 0)}{f(X_m = 0)} = \frac{0.02}{0.08} = \frac{2}{8}$$

$$\begin{aligned}
P(X_k = 40|X_m = 0) &= \frac{P(X_k = 40, X_m = 0)}{f(X_m = 0)} = \frac{0.05}{0.08} = \frac{5}{8} \\
P(X_k = 0|X_m = 20) &= \frac{P(X_k = 0, X_m = 20)}{f(X_m = 20)} = \frac{0.00}{0.12} = 0 \\
P(X_k = 0|X_m = 40) &= \frac{P(X_k = 0, X_m = 40)}{f(X_m = 40)} = \frac{0.1}{0.8} = \frac{1}{8} \\
P(X_k = 20|X_m = 20) &= \frac{P(X_k = 20, X_m = 20)}{f(X_m = 20)} = \frac{0.06}{0.12} = \frac{1}{2} \\
P(X_k = 40|X_m = 20) &= \frac{P(X_k = 40, X_m = 20)}{f(X_m = 20)} = \frac{0.06}{0.12} = \frac{1}{2} \\
P(X_k = 20|X_m = 40) &= \frac{P(X_k = 20, X_m = 40)}{f(X_m = 40)} = \frac{0.2}{0.8} = \frac{2}{8} \\
P(X_k = 40|X_m = 40) &= \frac{P(X_k = 40, X_m = 40)}{f(X_m = 40)} = \frac{0.5}{0.8} = \frac{5}{8}
\end{aligned}$$

Tabellen nedenunder viser de betingede fordelinger af kvindens arbejdstid, givet at mandens arbejdstid er hhv. 0, 20 og timer per uge:

x	0	20	40
$P(X_k = x X_m = 0)$	$1/8$	$2/8$	$5/8$
$P(X_k = x X_m = 20)$	0	$1/2$	$1/2$
$P(X_k = x X_m = 40)$	$1/8$	$2/8$	$5/8$

Vi ser altså, at fordelings af kvindens arbejdstid er ens når mandens arbejdstid er på 0 eller 40 timer.

5

For at se om X_k og X_m er uafhængige kan vi se på om de simultane ssh'er er lig produktet af de marginale ssh'er fra sp.1.:

$$P(X_k = 0, X_m = 20) = 0 \neq P(X_k = 0)P(X_m = 20) = 0.12 \cdot 0.11$$

Desuden er X_k og X_m ikke uafhængige fordi, de betingede fordelinger i spørgsmål 4 ikke er ens og lig den marginale fordeling af X_k i spørgsmål 1.

6

- (a) Den stokastiske variabel angiver hustrandens gennemsnitlige arbejdstid per uge.
(b) Vi udregner middelværdi ved:

$$E(\tilde{x}) = E\left(\frac{X_k + X_m}{2}\right) = \frac{1}{2}[E(X_k) + E(X_m)] = \frac{34.4 + 30}{2} = 32.2$$

Variansen af $\tilde{x}$ er dermed:

$$\begin{aligned} Var(\tilde{x}) &= Var\left(\frac{X_k + X_m}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}[var(X_k) + Var(X_m) + 2Cov(X_k, X_m)] \\ &= \frac{1}{4}[144.64 + 188 + 0], \text{ vi fandt i sp. 3 at: } cov(X_k, X_m) = 0 \\ &= \frac{332.64}{4} = 83.16 \end{aligned}$$

Altså er variansen af $\tilde{x} = 83.16$