

Matematik A E2019

Uge 50, Forelæsning 1

Eksamensforberedelse!

I dag og torsdag

- “Kort om eksamen” (inkl. eksempler på opgaver)
- Vi kigger på følgende tidl. (tilpassede) eksamensopgaver (se de tilpassede eksamenssæt på Absalon, øverste modul)
 - December 2018(prøveeks) opg 1, Februar 2019 opg 2, Juni 2019 opg 1-3, August 2019 opg 1.
Vi tager så meget vi kan nå i dag og resten torsdag
 - April 2019(prøveeks) behandles til holdundervisningen i uge 51. Dermed har vi været igennem alle 6 eksamenssæt fra E2018 og F2019 i løbet af kurset (se oversigt på Absalon, øverste modul).
- Slutevaluering af kurset!
- Torsdag: Eventuelle spørgsmål. Send spørgsmål på mail senest på onsdag kl 10 (tj@econ.ku.dk).
 - NB: Sidste chance for spørgsmål til mig!

December 2018 opg 1

Opgave 1

- (a) Lad $f(x)$ være en kontinuert funktion defineret på hele $\mathbb{R}$, og lad a, b være reelle tal.
Gør rede for definitionen af det bestemte integral

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \text{ hvor } F \text{ er stamfkt til } f.$$

- (b) Lad $f(x)$ og $g(x)$ være funktioner definerede på hele $\mathbb{R}$, der er differentiable og har kontinuerte afledede.

Vis, at der for alle $a, b \in \mathbb{R}$ gælder

$$\int_a^b f'(g(x))g'(x) dx = f(g(b)) - f(g(a)).$$

- (c) Udregn følgende bestemte integraler:

$$\int_0^2 \frac{x^2}{1+x^3} dx \quad \text{og} \quad \int_0^t \frac{e^x}{2+e^x} dx \quad (\text{hvor } t \text{ er et reelt tal}).$$


$$\int_a^b f'(g(x))g'(x) dx = f(g(b)) - f(g(a)).$$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ er satstillet til $f'(g(x))g'(x)$:

$$(f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x)) \quad (\text{kædereglen})$$

Se får vi ved def af det best. integral:

$$\int_a^b f'(g(x))g'(x) dx = (f \circ g)(b) - (f \circ g)(a) = \underline{f(g(b)) - f(g(a))}.$$

$$\int_0^t \frac{e^x}{2+e^x} dx \quad (\text{hvor } t \text{ er et reelt tal}).$$

Integration ved subst. : $u = 2 + e^x$
 $du = e^x dx$

$$\int_0^t \frac{e^x}{2+e^x} dx = \int_{2+e^0}^{2+e^t} \frac{1}{u} du = [\ln(u)]_3^{2+e^t} = \underline{\ln(2+e^t) - \ln(3)}$$

Februar 2019 opg 2

Opgave 2

Betragt funktionen f givet ved

$$f(x, y) = e^{x+y} - e^x - 2e^y \quad \text{for alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Bestem de partielle afledede

$$f'_1(x, y) \quad \text{og} \quad f'_2(x, y).$$

(b) Vis, at $(\ln(2), 0)$ er et kritisk punkt for f .

(c) Bestem alle anden-ordens partielle afledede for f , og opstil Hessematricen $f''(x, y)$.

Afgør om $(\ln(2), 0)$ er et lokalt maksimumspunkt, et lokalt minimumspunkt eller et saddepunkt. Begrund dit svar.

→(d) Bestem værdimængden for f .

$$f(x, y) = e^{x+y} - e^x - 2e^y \quad \text{for alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$f(x, y) = e^x(e^y - 1) - 2e^y$$

$$\overline{f(x, 1) = e^x(e - 1) - 2e} \begin{array}{l} \nearrow -2e \text{ n\u00e4r } x \rightarrow -\infty \\ \searrow \infty \text{ n\u00e4r } x \rightarrow \infty \end{array}$$

$f(x, 1)$ kan antage alle verdier i $(-2e, \infty)$

("Intermediate Value Thm", 7.10.1)

$$\overline{f(x, -1) = e^x(e^{-1} - 1) - 2e^{-1}} \begin{array}{l} \nearrow -2e^{-1} \quad x \rightarrow -\infty \\ \searrow -\infty \quad x \rightarrow \infty \end{array}$$

$f(x, -1)$ kan antage alle verdier i $(-\infty, -2e^{-1})$

$\overline{f(x, y)}$ kan altså antage alle verdier i
 $(-\infty, -2e^{-1}) \cup (-2e, \infty) = \mathbb{R}$

Dvs: $R_f = \mathbb{R}$

Juni 2019 opg 1

Opgave 1.

Lad $f(x, y)$ være en funktion af to variable.

- 1) Opskriv definitionen af, at f er homogen af grad k .

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y) \\ \text{for alle } (x, y) \text{ og alle } t > 0$$

Lad nu $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0 \wedge y > 0\}$.

Lad desuden funktionerne f og g , begge defineret på C , have forskrifterne

$$f(x, y) = \frac{2x\sqrt{y} - 3y\sqrt{x}}{x^2 + 2y^2}$$

$$g(x, y) = \sin\left(\frac{x^2}{2x^2 + y^2}\right)$$

- 2) Vis, ved hjælp af definitionen i 1), at f og g begge er homogene funktioner, og find deres homogenitetsgrader.

Vink til 2) (ikke givet til eksamen, men gives da vi i dette semester ikke har beskæftiget os med de trigonometriske funktioner, som dog burde være kendt fra jeres gymnasiale uddannelse): Det er ikke nødvendigt, at bruge egenskaber for funktionen $\sin(x)$.

$$f(x, y) = \frac{2x\sqrt{y} - 3y\sqrt{x}}{x^2 + 2y^2}$$

$$g(x, y) = \sin\left(\frac{x^2}{2x^2 + y^2}\right)$$

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= \frac{2(tx)\sqrt{ty} - 3(ty)\sqrt{tx}}{(tx)^2 + 2(ty)^2} = \frac{t^{3/2}(2x\sqrt{y}) - t^{3/2}(3y\sqrt{x})}{t^2x^2 + t^2(2y^2)} \\ &= \frac{t^{3/2}}{t^2} \cdot \frac{2x\sqrt{y} - 3y\sqrt{x}}{x^2 + 2y^2} = t^{-1/2} \cdot f(x, y) \end{aligned}$$

f er homogen af grad $k = -\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} g(tx, ty) &= \sin\left(\frac{(tx)^2}{2(tx)^2 + (ty)^2}\right) = \sin\left(\frac{\cancel{t^2}x^2}{\cancel{t^2}(2x^2 + y^2)}\right) \\ &= \sin\left(\frac{x^2}{2x^2 + y^2}\right) = t^0 g(x, y) \quad \begin{array}{l} g \text{ homogen af} \\ \text{grad } k=0. \end{array} \end{aligned}$$

Juni 2019 opg 2

Opgave 2

Lad funktionen f være givet ved forskriften

$$f(x, y) = -x^2 + 2x + \frac{1}{3}y^3 - \frac{3}{2}y^2 + 2y + 4 \quad \text{for alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1) Find de partielle afledede

$$f'_1(x, y) \quad \text{og} \quad f'_2(x, y).$$

2) Vis, at f har netop to kritiske punkter, og find disse.

3) Bestem alle anden-ordens partielle afledede for f , og opstil Hessematricen $f''(x, y)$.

4) Undersøg for hvert af de to kritiske punkter, om det er et lokalt maksimumspunkt, et lokalt minimumspunkt eller et sadelpunkt.



5) Find en ligning for tangentplanen til grafen for f gennem punktet $(2, 0, f(2, 0))$.



6) Find værdimængden for f .

$$f(x, y) = -x^2 + 2x + \frac{1}{3}y^3 - \frac{3}{2}y^2 + 2y + 4 \quad \text{for alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

5) Lign. for tangentplan gn. pkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

$$z = f(x_0, y_0) + f'_1(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_2(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Tangentplan gn. $(2, 0, f(2, 0)) = (2, 0, 4)$:

$$z = f(2, 0) + f'_1(2, 0)(x - 2) + f'_2(2, 0)(y - 0)$$

[Set $f(2, 0)$, $f'_1(2, 0)$ og $f'_2(2, 0)$ ind]

$$= \dots = -2x + 2y + 8$$

6) Værdimængde for f :

$$f(0, y) = \frac{1}{3}y^3 - \frac{3}{2}y^2 + 2y + 4 \begin{cases} \nearrow -\infty \text{ for } y \rightarrow -\infty \\ \searrow \infty \text{ for } y \rightarrow \infty \end{cases}$$

Den kont. fkt $f(0, y)$ kan altså antage alle værd. m.l. $-\infty$ og ∞

Altså $R_f = \mathbb{R}$.

Juni 2019 opg 3

Opgave 3

→ 1) Udregn det bestemte integral

$$\int_0^1 8xe^{2x} dx$$

Vink til 1) : Benyt partiel integration.

→ 2) Udregn det ubestemte integral

$$\int ((4x - 2) \cos(x^2 - x) - 6x^2) dx$$

Vink til 2) (ikke givet til eksamen, men gives da vi i dette semester ikke har beskæftiget os med de trigonometriske funktioner, som dog burde være kendt fra jeres gymnasiale uddannelse): En stamfunktion til $\cos(x)$ er $\sin(x)$.

Ved Partiell integration fås:

$$\begin{aligned}\int_0^1 8xe^{2x} dx &= \left[8x \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 - \int_0^1 8 \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right) dx \quad \left(\begin{array}{l} \text{se evt.} \\ \text{s. 346 øverst} \end{array} \right) \\ &= \left[4x e^{2x} \right]_0^1 - \int_0^1 4 e^{2x} dx \\ &= (4e^2 - 0) - \left[4 \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 = 4e^2 - (2e^2 - 2e^0) \\ &= \underline{2e^2 + 2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int ((4x - 2) \cos(x^2 - x) - 6x^2) dx \\ &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \int (4x - 2) \cos(x^2 - x) dx - \stackrel{\textcircled{2}}{\int} 6x^2 dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{1} \text{ Substit. med: } u &= x^2 - x \text{ og dermed } du = (2x - 1) dx \\ &= \int 2 \cos(u) du = 2 \sin(u) + C_1 = \underline{2 \sin(x^2 - x) + C_1}\end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \int 6x^2 dx = 6 \left(\frac{1}{3} x^3 \right) + C_2 = 2x^3 + C_2$$

$$\text{Samlet: } = 2 \sin(x^2 - x) - 2x^3 + C, \quad \text{hvor } C = C_1 - C_2 \text{ er arbitrær konst.}$$

August 2019

opg 1

Opgave 1

Lad $z = f(x, y)$ være en C^2 -funktion (dvs. at alle de fire partielle afledede af anden orden eksisterer og er kontinuerte overalt i definitionsmængden).

- 1) Opskriv udtrykket for Hessematricen $f''(x, y)$.

Antag nu, at punktet (x_0, y_0) er et kritisk punkt for funktionen f .

- 2) Opskriv ved hjælp af de afledede af anden orden en tilstrækkelig betingelse for, at (x_0, y_0) er henholdsvis et lokalt maksimumspunkt, et lokalt minimumspunkt eller et saddepunkt for f .

Lad nu funktionen f være givet ved forskriften

$$f(x, y) = xe^{-x} - 2y^2 + 8y - 8 \quad \text{for alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- 3) Vis, at punktet $(1, 2)$ er det eneste kritiske punkt for f , og at punktet er et lokalt maksimumspunkt.

- 4) Begrund, at f ikke har noget globalt minimumspunkt.

$$f(x, y) = xe^{-x} - 2y^2 + 8y - 8 \text{ for alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$4) f(0, y) = -2y^2 + 8y - 8 \rightarrow -\infty \text{ for } y \rightarrow \pm\infty$$

Derfor kan f ej have et globalt min-pkt.

Eller: Hvis (x_0, y_0) er globalt min-pkt, ss vil det være et kritisk pkt.

Men det eneste kritiske pkt er et lok. max-pkt.

Altså kan f ikke^{have} et globalt min-pkt.

