

Matematik A E2019

Uge 49, Forelæsning 2

Afsnit 14.4-6

Funktioner af flere variable:
Optimering med bibetingelser,
“Lagrange-metoden”
(fortsat)

Lidt overblik

- I mandags: Lagrange-metoden til løsning af

$$\max_{x,y} (\min_{x,y}) f(x,y) \quad \text{under bibet.} \quad g(x,y) = c$$

- I dag:
 - Lidt om teorien bag Lagrange-metoden (14.4, hængeparti)
 - Sætning og kort bevis-skitse
 - Tilstrækkelige betingelser for global og lokal løsning (14.5)
 - Sætninger og eksempler/øvelse
 - Udvidelse af Lagrange-metoden til flere var. og flere bibet. (14.6)
 - Eksempler
- Næste uge: Opsamling og eksamensforberedelse, især vil vi kigge på nogle tidligere eksamensopgaver
 - Præcist program kommer på Absalon
- Husk prøveeksamen i morgen!

Fra sidste gang:

$$\max_{x,y} (\min_{x,y}) f(x,y) \quad \text{under bibet.} \quad g(x,y) = c$$

Lagrange-metoden! (s. 535)

(i) Opstil *Lagrange-funktionen* $\mathcal{L}(x,y)$ med *Lagrange-multiplikatoren* λ

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c)$$

(ii) Differentiér $\mathcal{L}(x,y)$ mht x og y

$$\mathcal{L}'_1(x,y) = f'_1(x,y) - \lambda g'_1(x,y)$$

$$\mathcal{L}'_2(x,y) = f'_2(x,y) - \lambda g'_2(x,y)$$

(iii) Opstil de tre *førsteordens-betingelser* (nødv. bet. for løsning!)

$$\mathcal{L}'_1(x,y) = 0 \qquad \mathcal{L}'_2(x,y) = 0 \qquad g(x,y) = c$$

(iv) Find løsningskandidater til optimeringsproblemet ved at løse de tre ligninger for de ubekendte x , y og λ

Lidt om teorien bag Lagrange-met. (14.4)

$$\max_{x,y} (\min_{x,y}) f(x,y) \quad \text{under bibet.} \quad g(x,y) = c$$

Lagranges sætning (Theorem 14.4.1, s. 547)

Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ og lad f, g være C^1 -funktioner på A

Lad (x_0, y_0) være et indre pkt i A og et lokalt ekstremumpunkt for $f(x, y)$ under bibetingelsen $g(x, y) = c$

Antag $g'_1(x_0, y_0)$ og $g'_2(x_0, y_0)$ ikke begge er lig 0

Da findes entydigt tal λ , så (x_0, y_0) opfylder førsteordensbetingelserne:

$$\mathcal{L}'_1(x, y) = f'_1(x, y) - \lambda g'_1(x, y) = 0 \quad \text{og}$$

$$\mathcal{L}'_2(x, y) = f'_2(x, y) - \lambda g'_2(x, y) = 0$$

Kort bevis-skitse (se “An Analytic Argument”, s. 546-7):

[NB: notation ændret en smule ift slides til forelæsning 1]

Antag det betingede ekstr.-pkt opfylder $g'_2(x_0, y_0) \neq 0$

Så definerer $g(x, y) = c$ implicit funktion $y = h(x)$ i omegn af (x_0, y_0)
(Se afsnit 12.3, uge 46 forel. 2)

Betragt så flg funktion af én variabel:

$$k(x) = f(x, h(x))$$

x_0 er ekstremumspunkt for $k(x)$

(da (x_0, y_0) er ekstremumspunkt for $f(x, y)$
under bibetingelsen $g(x, y) = c$)

Derfor må vi have:

$$k'(x_0) = 0$$

Vha kæderegler og implicit differentiation følger
de ønskede førsteordensbetingelser af denne betingelse

Tilstrækkelige betingelser (14.5)

$$\max_{x,y} (\min_{x,y}) f(x,y) \quad \text{under bibet. } g(x,y) = c$$

Tilstr. betingelser for løsninger (Thm 14.5.1, s.550)

Antag (x_0, y_0) opfylder de tre førsteordensbet.

(A) Hvis $\mathcal{L}(x, y)$ er konkav, så er (x_0, y_0) en løsning til max-problemet.

Husk: $\mathcal{L}(x, y)$ er konkav hvis $\mathcal{L}''_{11}(x, y) \leq 0, \quad \mathcal{L}''_{22}(x, y) \leq 0$ og
(Se afsnit 13.2, uge 47 forel. 2)
 $\mathcal{L}''_{11}(x, y)\mathcal{L}''_{22}(x, y) - [\mathcal{L}''_{12}(x, y)]^2 \geq 0$

(B) Hvis $\mathcal{L}(x, y)$ er konveks, så er (x_0, y_0) en løsning til min-problemet.

Husk: $\mathcal{L}(x, y)$ er konveks hvis $\mathcal{L}''_{11}(x, y) \geq 0, \quad \mathcal{L}''_{22}(x, y) \geq 0$ og
 $\mathcal{L}''_{11}(x, y)\mathcal{L}''_{22}(x, y) - [\mathcal{L}''_{12}(x, y)]^2 \geq 0$

Eksempel: Vores velkendte nyttemax.-problem

$$\max_{x,y>0} \frac{1}{3} \ln(x) + \frac{2}{3} \ln(y) \quad \text{u.b.} \quad px + qy = m$$

Vi ved: $(x_0, y_0) = (\frac{1}{3} \frac{m}{p}, \frac{2}{3} \frac{m}{q})$ opfylder førsteordensbet. (med $\lambda = \frac{1}{m}$)

Vi ved også, at dette er (den entydige) løsning til problemet!

Men lad os alligevel checke det er en løsning ved at vise, at $\mathcal{L}(x, y)$ er konkav:

$$\mathcal{L}(x, y) = \frac{1}{3} \ln(x) + \frac{2}{3} \ln(y) - \lambda (px + qy - m)$$

$$\mathcal{L}'_1(x, y) = \frac{1}{3} \frac{1}{x} - \lambda p$$

$$\mathcal{L}'_2(x, y) = \frac{2}{3} \frac{1}{y} - \lambda q$$

$$\mathcal{L}''_{11}(x, y) = \frac{1}{3} (-x^{-2}) = -\frac{1}{3} x^{-2} < 0 \quad \mathcal{L}''_{22}(x, y) = -\frac{2}{3} y^{-2} < 0$$

$$\mathcal{L}''_{12}(x, y) = 0$$

$$\mathcal{L}''_{11}(x, y) \cdot \mathcal{L}''_{22}(x, y) - (\mathcal{L}''_{12}(x, y))^2 = \frac{2}{9} x^{-2} y^{-2} > 0$$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{3} \frac{m}{p}, \frac{2}{3} \frac{m}{q} \right)$
er løsn. til
max-probl.

Øvelse: Omkostningsminimering

$$\min_{L,K} 4L + K \quad \text{under bibet.} \quad 8L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}} = 32$$

(NB: $w = 4$, $r = 1$, $F(L, K) = 8L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}$ og $y = 32$)

(pingo.coactum.de, 708646)

(1) Brug Lagrange-metoden til at finde en løsningskandidat (L_0, K_0)

(2) Vis, at løsningskandidaten fra (1) faktisk er en løsning

Brug den tilstr. betingelse:

$$\mathcal{L}''_{11}(x, y) \geq 0, \quad \mathcal{L}''_{22}(x, y) \geq 0 \quad \text{og} \\ \mathcal{L}''_{11}(x, y)\mathcal{L}''_{22}(x, y) - [\mathcal{L}''_{12}(x, y)]^2 \geq 0$$

$$(1) \mathcal{L}(L, K) = 4L + K - \lambda(8L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}} - 32)$$

$$\mathcal{L}'_1(L, K) = 4 - \lambda \cdot 8 \cdot \left(\frac{1}{2} L^{-\frac{1}{2}}\right) K^{\frac{1}{2}} = 4 - 4\lambda L^{-\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathcal{L}'_2(L, K) = 1 - \lambda \cdot 8 L^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} K^{-\frac{1}{2}}\right) = 1 - 4\lambda L^{\frac{1}{2}} K^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{FOCs: } 4 = 4\lambda L^{-\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}, \quad 1 = 4\lambda L^{\frac{1}{2}} K^{-\frac{1}{2}} \quad (+ \text{bibetingelse})$$

NB: $\lambda > 0$.

$$\min_{L,K} 4L + K \quad \text{under bibet.} \quad 8L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}} = 32$$

(1) Brug Lagrange-metoden til at finde en løsningskandidat (L_0, K_0)

(2) Vis, at løsningskandidaten fra (1) faktisk er en løsning

Divide'r første FOC med anden FOC:

$$4 = L^{-1} K' \quad \Rightarrow \quad \underline{K = 4L}$$

Sæt ind i bibet:

$$8L^{\frac{1}{2}}(4L)^{\frac{1}{2}} = 32 \quad \Rightarrow \quad 16L = 32 \quad \Rightarrow \quad \underline{L = 2}$$

$$\underline{K = 4 \cdot 2 = 8}$$

Løsn. kandidat: $\underline{(L_0, K_0) = (2, 8)}$

$$\begin{aligned} (2) \quad \underline{\alpha''_{11}} &= -4\lambda \left(-\frac{1}{2} L^{-\frac{3}{2}}\right) K^{\frac{1}{2}} = 2\lambda L^{-\frac{3}{2}} K^{\frac{1}{2}} > 0 & \underline{\alpha''_{11} \cdot \alpha''_{22}} &= 4\lambda^2 L^{-1} K^{-1} \\ \underline{\alpha''_{22}} &= -4\lambda L^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2} K^{-\frac{3}{2}}\right) = 2\lambda L^{\frac{1}{2}} K^{-\frac{3}{2}} > 0 \\ \underline{\alpha''_{12}} &= -4\lambda L^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} K^{-\frac{1}{2}}\right) = -2\lambda L^{-\frac{1}{2}} K^{-\frac{1}{2}} & \underline{(\alpha''_{12})^2} &= 4\lambda^2 L^{-1} K^{-1} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\max_{x,y} (\min_{x,y}) f(x,y) \quad \text{under bibet. } g(x,y) = c$$

Man kan i nogle tilfælde være interesseret i lokale ekstremumpkt for $f(x,y)$ under bibet. $g(x,y) = c$ ("lokale løsninger")

Tilstr. bet. for *lokale* løsninger (Thm 14.5.2, s.551)

Definér:

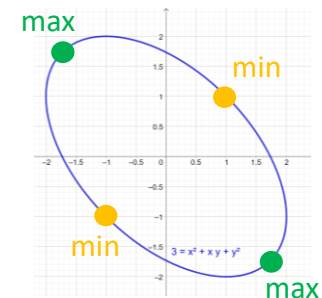
$$D(x,y,\lambda) = (f''_{11} - \lambda g''_{11})(g'_2)^2 - 2(f''_{12} - \lambda g''_{12})g'_1 g'_2 + (f''_{22} - \lambda g''_{22})(g'_1)^2$$

Antag (x_0, y_0) (og tilh. λ) opfylder de sædv. tre førsteordensbet.

- (i) Hvis $D(x_0, y_0, \lambda) < 0$, så er (x_0, y_0) en lokal løsning til max-problemet
- (ii) Hvis $D(x_0, y_0, \lambda) > 0$, så er (x_0, y_0) en lokal løsning til min-problemet

Se illustrativ anvendelse i Example 15.5.4, s.551:
(problem fra forelæsning 1)

$$\max_{x,y} (\min_{x,y}) x^2 + y^2 \quad \text{u.b. } x^2 + xy + y^2 = 3$$



Flere variable og bibetingelser (14.6)

Eksempel med flere variable:

Nyttemax-problem, n varer, Cobb-Douglas nyttefkt

$$\max_{x_1, \dots, x_n \geq 0} x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n} \quad \text{u.b.} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = m$$

(hvor $a_1, \dots, a_n > 0$)

Ved transformation med $\ln$ får vi flg. problem med samme løsninger:

$$\max_{x_1, \dots, x_n > 0} a_1 \ln(x_1) + a_2 \ln(x_2) + \dots + a_n \ln(x_n) \quad \text{u.b.} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = m$$

Vi kan antage, at $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ (overvej!)

Vi vil nu løse problemet vha Lagrange-metoden med n variable

Helt analogt til 2 variable, vi får nu "bare" $n + 1$ førsteordensbetingelser, altså $n + 1$ ligninger som skal løses for de variable $x_1, x_2, \dots, x_n$ og λ

NB: Løsningen kan også findes i bogen (uden antagelsen $a_1 + \dots + a_n = 1$), se example 14.6.3, ligning (14.6.8), s. 555

$$\max_{x_1, \dots, x_n > 0} a_1 \ln(x_1) + a_2 \ln(x_2) + \dots + a_n \ln(x_n) \quad \text{u.b.} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = m$$

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n) = a_1 \ln(x_1) + \dots + a_n \ln(x_n) - \lambda (p_1 x_1 + \dots + p_n x_n - m)$$

FOCs: (for $i = 1, \dots, n$)

$$\mathcal{L}'_i(x_1, \dots, x_n) = a_i \frac{1}{x_i} - \lambda p_i = 0 \Rightarrow p_i x_i = \frac{a_i}{\lambda}$$

Set ind i budget bet:

$$\frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2}{\lambda} + \dots + \frac{a_n}{\lambda} = m$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{m}$$

Heraf findes x_i :

$$x_i = \frac{a_i}{p_i \lambda} = \frac{a_i}{p_i \cdot \frac{1}{m}} = \frac{a_i m}{p_i}$$

Løsningskandidat!

Dette er faktisk løsn!

$$\max_{x_1, \dots, x_n > 0} a_1 \ln(x_1) + a_2 \ln(x_2) + \dots + a_n \ln(x_n) \quad \text{u.b.} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = m$$

Eksempel med flere bibetingelser (example 14.6.4, s. 556):

$$\min_{x,y,z} x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{under bibet.} \quad \begin{cases} x + 2y + z = 30 \\ 2x - y - 3z = 10 \end{cases}$$

Kortfattet bekrivelse af løsning vha Lagrange-metoden:

Lagrange-funktion:

NB: En Lagrange-multiplikator pr bibetingelse!

$$\mathcal{L}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda_1(x + 2y + z - 30) - \lambda_2(2x - y - 3z - 10)$$

Find løsningskandidater ved at opstille de 5 førsteordensbetingelser og løse disse ligninger for x, y, z og λ_1, λ_2

$$\rightarrow (x, y, z) = (10, 10, 0)$$

Eksistens af løsning: Geometrisk argument!

Vi skal minimere den kvadrerede afstand fra $(0, 0, 0)$ til punkt på linie givet ved skæring mellem to planer

Konklusion: $(10, 10, 0)$ er løsning til problemet

