

3. aflevering, Makro 1

ldg790 - Christian B. Gustafson

Oktober 2020

Opgave 1

1.1

De øvrige krav er således. Udover at kapital-arbejds og BNP (el. indkomst pr. arbejder) forholdet skal være konstant, skal forbrug og opsparing/investering pr. arbejder, arbejdskraft og reallønnen vokse med en og samme konstante rate g .

Kapital-output forholder som vi får givet skal være konstante, samt afkastet på kapital (formue) r_t skal være konstant.

Derudover vokser forbrug, investering/opsparing, BNP og kapital (formue) med en konstant vækstrate på $g + n$, hvor n er vækst i beskæftigelse.

Hvordan begrebet balanceret vækst bruges i teori om økonomisk vækst er således, at vi kan bruge ovenstående som konsistentstjek for vækstmodeller. Det betyder at en model skal for konstante strukturelle parameter kunne forudse, at økonomien mod eller bevæger sig langs en langsigtet vækstbane som er karakteriseret ved balanceret vækst.

1.2

Ved konstante indkomstandel skal der være en relativ konstant lønandel og desuden skal indkomstandelen summere til en. Dette betyder at kapitalandelen $\frac{r_t K_t}{Y_t}$ også vil være relativ konstant. Desuden kan vi komme ind på at realrenten som er givet ved nominel rente minus faktisk inflation er relativ konstant på langt sigt, hvilket medfører at afkastgrader på kapital må have en nogenlunde tæt sammenhæng med realrenter, altså, må forholdet $\frac{K_t}{Y_t}$ være relativ konstant.

Hvis man ser kritisk på det, kan vi starte med at sige at konstant realrente på langt sigt kan diskuteres hvorvidt det er gældende, fordi nogle tids horisonter for realrenter virker til at udvise store sving. Anden ting kan være

at antagelsen om kapitalens andel er 1 minus lønandelen ikke er helt oplagt, fordi der også er andre input faktorer såsom naturressourcer, og en tredje ting kan være, at antagelsen løndele er konstante kan nogle betvivle.

Til sidst kan vi nævne, at hvis kapital/output forholdet rent faktisk er tendens til at være konstant på længere sigt, bør man kunne se dette i direkte mål.

Vi har set lande, især europæiske, hvor der vises at samme forhold kan have en stigende tendens over længere perioder.

1.3

Vi kan starte med at sige, at for USA modsiger denne figur ikke tendens om konstant kapital/output forhold, fordi vi befinder os i en periode på 140 år, hvor USA starter og slutter på omkring de 400 pct. Vi ser dog et dyk for USA, hvilket det kan siges at være en afvigelse grundet andenverdenskrig samt krisen i 30'erne.

For Europa kan vi se at der er nogenlunde er en konstant rate fra 1870-1910, dog sker der et kæmpe dyk fra 1910 til og med andenverdenskrig, hvor europa går fra 700 pct. til 210 pct. Efter anden verdenskrig stiger den igen til de 540 pct. Derimod kan man ikke udelukke at europa er på vej til et stabilt niveau inden første verdenskrig.

Alt i alt kan man sige at figuren bekræfter ikke tendensen om konstant kapital/output forhold. Derimod viser figuren også over en rigtig lang periode hvor forholdet kunne både stige og aftage over flere årtier.

Opgave 2

2.1

Jeg starter med at angive udtryk for reallønnen ved at differentiere med hensyn til L i ligning 1:

$$w_t = \frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = (1 - \alpha)K_t^\alpha (A_t L_t)^{-\alpha} A_t = (1 - \alpha) \left(\frac{K_t}{A_t L_t} \right)^\alpha A_t \quad (1)$$

Nu til kapitallejesatsen som jeg finder ved at differentiere ligning 1 med hensyn til K:

$$r_t = \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = \alpha K_t^{\alpha-1} (A_t L_t)^{1-\alpha} = \alpha \left(\frac{K_t}{A_t L_t} \right)^{\alpha-1} \quad (2)$$

Nu til indkomstandelen som beregnes ved:

$$\frac{w_t L_t}{Y_t} = \frac{(1 - \alpha) K_t^\alpha (A_t L_t)^{-\alpha} A_t L_t}{K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}} = 1 - \alpha \quad (3)$$

Nu til kapitalens bruttoindkomstandel:

$$\frac{r_t K_t}{Y_t} = \frac{\alpha K_t^{\alpha-1} (A_t L_t)^{1-\alpha} K_t}{K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}} = \alpha \quad (4)$$

Et bud på en plausibel værdi af parameteren α kan findes ved først at se på lønandelen der anses for at ligge relativt konstant omkring 2/3, hvilket svarer til $\alpha = 1/3$.

2.2

Vi har fra ligning (1) følgende:

$$\tilde{y}_t = \frac{Y_t}{A_t L_t} = \frac{K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}}{(A_t L_t)^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}} = \left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^\alpha = \tilde{k}_t^\alpha \quad (5)$$

Ved at omskrive ligning 2 som:

$$K_{t+1} = sY_t + (1 - \delta)K_t \quad (6)$$

Så dividere vi med, $A_{t+1}L_{t+1} = (1+n)(1+g)A_tL_t$ på begge sider og så opnår vi følgende udtryk:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)} [s\tilde{y}_t + (1 - \delta)\tilde{k}_t] \quad (7)$$

Og nu kan vi indsætte udtrykket for $\tilde{y}_t$ og derved opnå transitionsligningen:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)} [s\tilde{k}_t^\alpha + (1 - \delta)\tilde{k}_t] \quad (8)$$

For at få Solow-ligningen kan vi trække $\tilde{k}_t$ fra på begge sider:

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t &= \frac{1}{(1+n)(1+g)} [s\tilde{k}_t^\alpha + (1 - \delta)\tilde{k}_t - (1+n)(1+g)\tilde{k}_t] \\ \tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t &= \frac{1}{(1+n)(1+g)} [s\tilde{k}_t^\alpha + (n + g + \delta + ng)\tilde{k}_t] \end{aligned} \quad (9)$$

2.3

For at der skal være konvergens skal følgende egenskaber være tilstede:

1. Er overalt voksende, hvilket fremgår af ligning (8).
2. Modellen skal gå igennem punktet (0,0) hvilket også fremgår af ligning (8).

3. For det tredje skal modellen have en entydig streng positiv skæring med 45°-linjen.

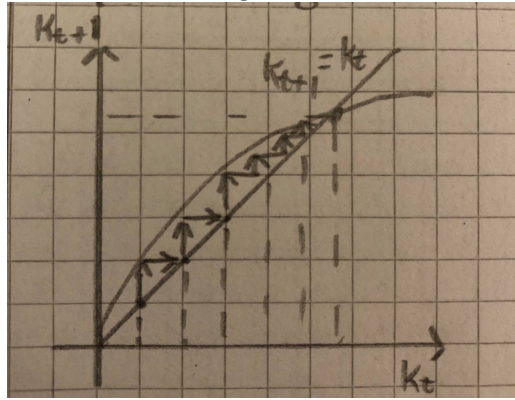
4. Modellen skal have en aftagende hældning overalt. Dette fremgår af ligning (8):

$$\frac{\partial \tilde{k}_{t+1}}{\partial \tilde{k}_t} = \frac{1}{(1+n)(1+g)} [s\alpha \tilde{k}_t^{\alpha-1} + (1-\delta)] \quad (10)$$

hvor vi ser at eksponenten $\alpha - 1$ er negativ.

Konvergens af $\tilde{k}_t$ til $\tilde{k}^*$ er illustreret i figur 1 nedenunder:

Figur 1:



Steady state-værdien af $\tilde{y}_t^*$ finder vi ved at indsætte $\tilde{k}^*$ i udtrykket for $\tilde{y}_t$:

$$\tilde{y}_t^* = (\tilde{k}_t^*)^\alpha = \left(\frac{s}{(n+g+\delta+ng)} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (11)$$

For kapital/output-forholdet følger steady state-værdien af:

$$\tilde{z}_t^* = \frac{\tilde{k}_t^*}{\tilde{y}_t^*} = \frac{\left(\frac{s}{(n+g+\delta+ng)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\left(\frac{s}{(n+g+\delta+ng)} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} = \left(\frac{s}{(n+g+\delta+ng)} \right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}} = \left(\frac{s}{(n+g+\delta+ng)} \right) \quad (12)$$

En bruttoinvesteringssats s på 0.22 pct. kan være rimelig og en samlet værdi af $n+g+\delta$ på 6-12 pct. lyder også rimeligt. Dermed angiver dette et plausibelt langsigtet kapital/output-forhold i området 200-600 pct.

2.4

Vi viser dette ved først at anvende følgende:

$$\tilde{y}_t = \frac{Y_t}{A_t L_t} = \frac{K^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}}{A_t L_t} = \frac{K_t^\alpha A_t^{1-\alpha} L_t^{1-\alpha}}{A_t L_t} = \tilde{k}_t^\alpha$$

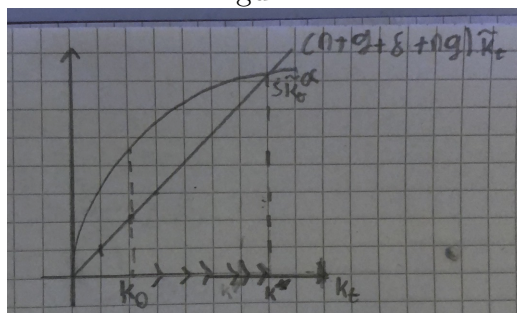
Så anvender vi udtrykket vi fandt ovenfor:

$$z_t = \frac{\tilde{k}_t}{\tilde{y}_t} = \frac{\tilde{k}_t}{\tilde{k}_t^\alpha} = \tilde{k}_t^{1-\alpha} \quad (13)$$

Altså, har vi vist at for alle t er $z_t = \tilde{k}_t^{1-\alpha}$.

Illustration i et SOlowdiagram vises nedenunder:

Figur 2:



Vi ser at $\tilde{k}_t$ konvergerer op mod k^* . Det betyder at kapital per effektiv arbejder er stigende mens den tilpasser sig. Ligning (14) fortæller os at det samme gælder for kapital/output-forholdet. I ligning (1) i opg 2.1 beregne vi reallønnen og der fremgår det også at denne er voksende under tilpasningen, hvilket skyldes at $\tilde{k}_t$ og A_t er voksende. I ligning (2) ser vi at reallejesatsen r_t og dermed også realrenten $r_t - \delta$ aftager i hele forløbet. Dette ses ved at kigge på potensen som er $\alpha - 1$, hvorimod reallønnen har α som potens. Til sidst har vi indkomstandele der i følge ligning (3) og (4) ligger fast under tilpasningen. og desuden ligger lønandelen fast på $1 - \alpha$.

Mht. Piketty's teser ser vi at, kapital/output-forholdet, efter at begivenheder har givet andledning til et kapitaltab, vokser mod et nyt steady-state, hvilket er i relativ fin overensstemmelse med Piketty's teser. Dog det forhold beskrevet at lønandelen i under tilpasningen er konstant, er selvfølgelig ikke i overensstemmelse med Piketty's teori, om at lønandelen under tilpasningen har en aftadende tendens.

2.5

Det modellens konvergensrate udtrykker er, hvor stor en andel den tilbageværende afstand tilbageværende afstand til steady-state, Dette er målt ved forskellen mellem $\tilde{y}_t$ og $\tilde{y}^*$, der tilbægælægges over en periode. Vi får

angivet at modellens konvergensrate er $(1 - \alpha)(n + g + \delta)$, hvilket vi kan evaluere til at have $(1 - \frac{1}{3}) \cdot (7.5pct.) = 5pct.$. Hvis ca. 5 pct. af afstanden til steady state lukkes på et år, må $5 \cdot 10$ pct.=50pct. være et overkantsskøn for, hvor meget der lukkes over ti år, hvilket skyldes rentes rente-effekten. Alt i alt, angiver modellen at det godt kan tage mere end et årti at tilbagelægge 50 pct. af den initiale afstand til steady state.

Med hensyn til Piketty's teser peger det på at hans forståelse over for kapital/output forholdet at der igennem flere årtier efter anden verdenskrig vil der være en tilpasningsproces mod steady state. Altså, kan han sagtens have ret og der er derfor ikke muligt at udelukke, at dette forhold er på vej op mod et niveau som vi så eksempelvis fra slutningen af 1800-tallet.

2.6

Vi får givet følgende:

$$K_{t+1} - K_t = s'Y_t$$

Vi starter med at angive solowligningen ud fra ligning (9), hvor nu skriver s som s' og $\delta = 0$, dermed får vi følgende:

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)} [s' \tilde{k}_t^\alpha + (n+g+ng) \tilde{k}_t] \quad (14)$$

Dernæst fra ligning (10) og (12-13) kan vi udlede følgende ss-værdier:

$$\tilde{k}^{*'} \equiv \left(\frac{s'}{n+g+ng} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (15)$$

$$\tilde{y}^{*'} \equiv \left(\frac{s'}{n+g+ng} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (16)$$

$$\tilde{z}^{*'} \equiv \left(\frac{s'}{n+g+ng} \right) \quad (17)$$

Vi bemærker at betingelsen $n+g+ng > 0$ gælder grundet antagelserne, hvilket sikrer monoton konvergens af $\tilde{k}$ mod $\tilde{k}^{*'}$. Eftersom $z_t = \tilde{k}_t^{1-\alpha}$, vil z_t udvikle sig over tid på sammenvis som i den første model. Tilpasningsprocessen mod ss har derfor ikke nogen betydeligt forskel mellem de to modeller. For begge modeller gælder det stadig at ss-værdien af kapital-output-forholdet, z^* og $\tilde{z}^{*'}$, bliver større, hvis $n+g$ bliver mindre, hvilket også kan ses i brøken.

I den første model ser vi at for $n+g$ gående mod nul vil z_t^* gå mod s/δ og i den nye vil $\tilde{z}^{*'}$ gå mod uendelig for $n+g$ gående mod nul.

Mhs. til Piketty's teorier er forskellen, at en lav værdi (tæt på nul) for $n+g$ i den første model vil føre til en høj men begrænset ss-værdi for kapital/output

forholdet, men den i den nye model vi føre til en endnu højere (ubegrænset) ss-værdi for kapital/output-forholdet. Pikkety's ide om, at der kan være meget høje værdier af kapital/output-forholdet i fremtiden grundet aftagende tendens i $n+g$, vil der således menes at den første model således er mest bekræftende.

2.7

For det første får vi givet at modellen indebærer monoton konvergens af $\tilde{k}_t$ mod $\tilde{k}^*$. I (CES2) ser vi, at hvis $\sigma < 1$, så er begge eksponenter positive, hvilket betyder at $\tilde{k}_t$ vil være en voksende værdi og dermed er $\tilde{z}_t$ også voksende. Hvis $\sigma > 1$ er er begge eksponenter negative, hvilket betyder at en voksende værdi af $\tilde{k}_t$ igeen betyder at $\tilde{z}_t$ også vokser. Dvs. hvad enten sigma er mindre eller større end 1 så vil der stadig være en tilpasningsfase med et voksende kapital/output-forhold selen der er en større destruktion af kapital. Dog er der en forskel mht. hvordan lønandelen agerer i tilpasningsfasen. af (CES1) ser vi at hvis sigma_l har vi negativ eksponent, hvilket medfører voksende lønandel i en periode, hvor $\tilde{k}_t$ vokser, men hvis sigma_l > 1, vil lønandelen være aftagende i en periode hvor $\tilde{k}_t$ vokser. Altså hvis sigma_l > 1, viser modellen den tilpasning i lønandelen som er i overensstemmelse med Piketty's teorier.

Vi finder lønandelen i ss ved at indsætte $\tilde{k}^*$ for $\tilde{k}_t$ i (CES1):

$$\begin{aligned} \left(\frac{w_t L_t}{Y_t}\right)^* &= \frac{1 - \alpha}{\alpha \left[\left(\frac{1 - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{(n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma-1}} \right]^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1 - \alpha)} \\ &= \frac{1 - \alpha}{\frac{\alpha(1-\alpha)s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)((n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}})}{(n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}} \\ &= \frac{(1 - \alpha)((n + g + \delta + ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}})}{(1 - \alpha)((n + g + \delta + ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}})} \end{aligned} \quad (18)$$

$$1 - \alpha \cdot \left(\frac{s}{n + g + \delta + ng} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \quad (19)$$

$$= 1 - \alpha \cdot (z^*)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \quad (20)$$

Hvis $n+g$ aftager ser vi i følge (CES5) at z^* vokser grundet at $n+g$ står i nævneren, hvilket er i overensstemmelse med Pikkety's teori. Det højere z^* betyder en laver ss-lønandel, hvis $\sigma > 1$

Piketty's teorier om, at kapital/outputforholdet er voksende som et tilpasningsfænomen efter en større kapitaldestruktion og som et ss-fænomen som

følge af at n+g aftager er ikke bekræftet i modellen når der er en mere generel substitutionselasticitet, dog er ideen om, at lønandelen er aftagende både som tilpasnings- og ss-fænomen er bekræftet af, at substitutionselasticitet er større end 1.

2.8

Vi starter med (CES1) hvor vi bruger $w_t = \partial Y_t / \partial L_t$.

$$\begin{aligned}
 \frac{w_t L_t}{Y_t} &= \frac{\frac{\sigma}{\sigma-1}(\alpha K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}) + (1-\alpha)(A_t L_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}})^{\frac{\sigma}{\sigma-1}-1}}{(\alpha K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)(A_t L_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}})^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}} \\
 &= \frac{(1-\alpha)(A_t L_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{\alpha K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)(A_t L_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}} \\
 &= \frac{(1-\alpha)}{\alpha(\frac{K_t}{A_t L_t})^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)} = \frac{1-\alpha}{\alpha \tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)} \quad (21)
 \end{aligned}$$

Hvilket er CES1

Nu til CES2 som vi beregner ved at gøre følgende:

$$\begin{aligned}
 \frac{Y_t}{K_t} &= \frac{(\alpha K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)(A_t L_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}})^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}}{K_t} \\
 &= \frac{(\alpha K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)(A_t L_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}})^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}}{K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}} \\
 &= (\alpha + (1-\alpha)(\frac{K_t}{A_t L_t})^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}})^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\
 z_t &= (\alpha + (1-\alpha)\tilde{k}_t^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}})^{-\frac{\sigma}{\sigma-1}}
 \end{aligned}$$

Nu til CES3 som vi beregner ved følgende:

$$\begin{aligned}
 \tilde{y}_t \equiv \frac{Y_t}{A_t L_t} &= \frac{(\alpha K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)(A_t L_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}})^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}}{A_t L_t} \\
 &= \frac{(\alpha K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)(A_t L_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}})^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}}{(A_t L_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}} \\
 &= [\alpha \tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}
 \end{aligned}$$

Vi kan nu omskrive $K_{t+1} = sY_t + (1-\delta)K_t$ og derefter dividere med $A_{t+1}L_{t+1} = (1+n)(1+g)A_tL_t$:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{(1+n)(1+g)}(s\tilde{y}_t + (1-\delta)\tilde{k}_t)$$

Vi indsætter y_t

$$= \frac{1}{(1+n)(1+g)}(s[\alpha\tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} + (1-\delta)\tilde{k}_t)$$

Dermed opnår vi transitionsligningen og ved at trække $\tilde{k}_t$ fra på begge sider får vi følgende:

$$\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_t = \frac{1}{(1+n)(1+g)}(s[\alpha\tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} - (n+g+\delta+ng)\tilde{k}_t)$$

Og hermed opnår vi CES3:

Videre til CES 4:

$$\begin{aligned} s[\alpha\tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} &= (n+g+\delta+ng)\tilde{k}_t \Leftrightarrow \\ s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}[\alpha\tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha)] &= (n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \Leftrightarrow \\ s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}(1-\alpha) &= [(n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}]\tilde{k}_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \Leftrightarrow \\ \tilde{k}_t &= \tilde{k}_t^* \equiv \left(\frac{s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}(1-\alpha)}{(n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \end{aligned}$$

Hvilket er CES4

For at finde CES5 indsætter vi CES 4 i CES2:

$$\begin{aligned} z^* &= (\alpha + (1-a\alpha)) \left[\left(\frac{s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}(1-\alpha)}{(n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \right]^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}} \\ &= (\alpha + (1-a\alpha)) \left(\frac{s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}(1-\alpha)}{(n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}} \right)^{-1} \\ &= \left(\alpha + \frac{(n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}} \right)^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}} \\ &= \left(\frac{\alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (n+g+\delta+ng)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} - \alpha s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{s^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}} \right)^{-\frac{\sigma-1}{\sigma}} \\ &= \left(\frac{n+g+\delta+ng}{s} \right)^{-1} = \frac{s}{n+g+\delta+ng} \end{aligned}$$

Og dermed har vi vist CES5.