

1.aflevering, Makro 1

ldg790 - Christian B. Gustafson

September 2020

Spørgsmål 1

Vi skal vise at BNP/capita er givet ved:

$$y_t = \frac{Y_t}{N_t} = \lambda^{1-\alpha} B K_t^\alpha$$

Vi benytter ligning 1 og indsætter ligning 4.

$$Y_t = B K_t^\alpha (\lambda N_t)^{1-\alpha}$$

Så bryder vi parenteserne

$$Y_t = B K_t^\alpha \lambda^{1-\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

Vi omskriver til følgende

$$Y_t = B K_t^\alpha \lambda^{1-\alpha} \frac{N_t}{N_t^\alpha}$$

Vi omskriver igen

$$Y_t = \frac{B K_t^\alpha \lambda^{1-\alpha} \cdot N_t}{N_t^\alpha}$$

Nu kan vi vise at:

$$Y_t = B k_t^\alpha \lambda^{1-\alpha} \cdot N_t$$

Og endelig får vi at:

$$\frac{Y_t}{N_t} = \lambda^{1-\alpha} B k_t^\alpha$$

Spørgsmål 2

Vi starter med at benytte ligning 3:

$$K_{t+1} - K_t = S_t - \delta K_t$$

Indsætter ligning 2

$$K_{t+1} - K_t = sY_t - \delta K_t$$

Indsætter ligning 1

$$K_{t+1} - K_t = s(BK_t^\alpha L_t^{1-\alpha}) - \delta K_t$$

Indsætter ligning 4

$$K_{t+1} - K_t = s(BK_t^\alpha (\lambda N_t)^{1-\alpha}) - \delta K_t$$

Opløser parentesen

$$K_{t+1} - K_t = sBK_t^\alpha \lambda^{1-\alpha} N_t^{1-\alpha} - \delta K_t$$

$$K_{t+1} = sBK_t^\alpha \lambda^{1-\alpha} N_t^{1-\alpha} + (1 - \delta)K_t$$

Deler med N_t på begge sider og benytter ligning 5

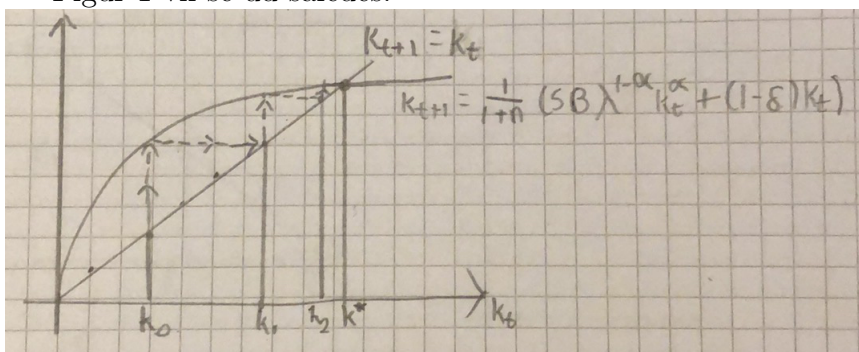
$$\frac{K_{t+1}}{N_{t+1}} = \frac{sBK_t^\alpha \lambda^{1-\alpha} N_t^{1-\alpha} + (1 - \delta)K_t}{(1 + n)N_t}$$

$$k_{t+1} = \frac{sB\lambda^{1-\alpha}k_t^\alpha + (1 - \delta)k_t}{(1 + n)}k_t$$

Omskriver til følgende.

$$k_{t+1} = \frac{1}{1 + n}(sB\lambda^{1-\alpha}k_t^\alpha + (1 - \delta)k_t)$$

Figur 1 vil se ud således:



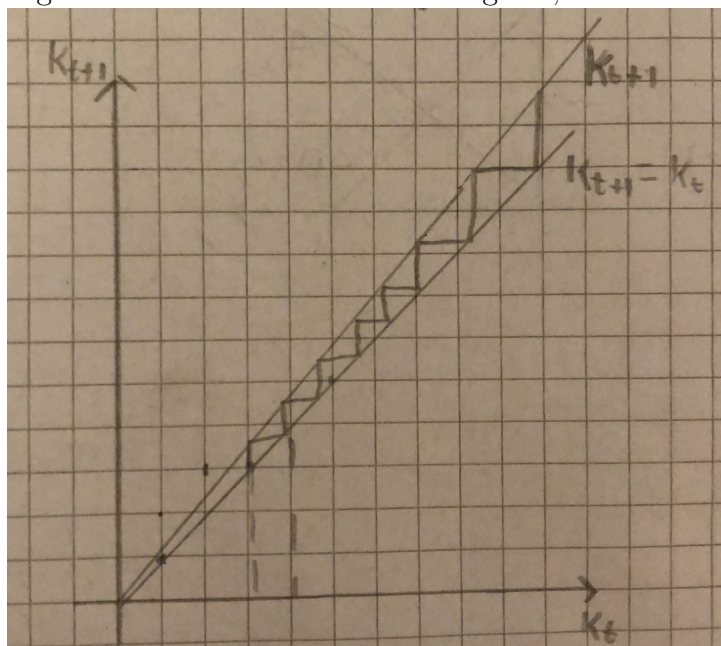
Grafen ovenover illustrerer transitionsdiagrammet. 45-graders linjen $k_{t+1} = K_t$ illustrerer punkter hvor kapital per arbejder i periode t er lig kapital per arbejder i periode $t+1$.

Transitions ligningen viser kapital per medarbejder til periode t . Den vertikale afstand mellem de to kurver er forskellen i opsparing per arbejder og kompensationskravet per arbejder til perioden t . I punktet K^* har vi steady state, der fortæller at opsparing er lig kompensationskravet, hvilket medfører at de to kurver skærer hinanden.

Intuitionen bag transitionsprocessen er, at for $0 < k_0 < k_*$ vil der opspares mere end kompensationskravet som følger af udtynding og nedslidning af kapital. Kapitalakkumulationen handler om, at kapital per arbejder og dermed indkomst per arbejder stiger i næste periode. Dvs. når indkomst per arbejder stiger, øges produktionen, hvilket øger kapital per arbejder, osv. Fordi kompensationskravet stiger proportionalt med k_t , men væksten i opsparingen aftager pga. aftagende marginalprodukt til kapital, vil der opstå en konvergens mod en steady state-værdi. Det gælder modsat, hvis $k_0 > k_*$

Spørgsmål 3

Figur 2 illustrerer et transitionsdiagram, hvor $\alpha = 1$



Når $\alpha = 1$ ser vi at følgende opstår $\frac{1}{1+n} s B \lambda^0 k_t^1$, som er en linje der ligger over $(n - \delta)k_t$. Dette viser konstant afkast til kapital, fremfor aftagende marginalprodukt. Dermed vil en stigning i kapitalapparatet, betyde en tilsvarende stigning i opsparingen. Dermed vil økonomien aldrig ramme

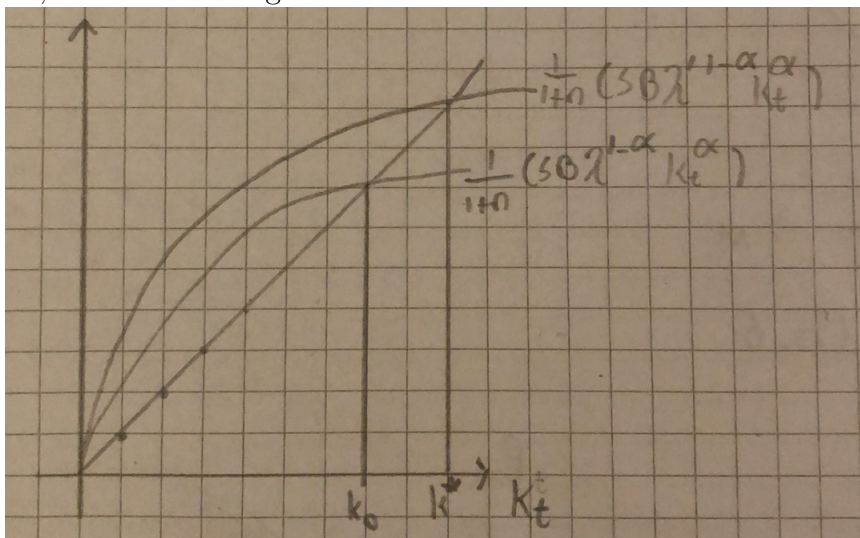
steady state.

Der opstår altså en konstant stigning i både kapitalapparatet og output/BNP, således vil der i punktet k_0 , altså fortsat spares mere op end kompensationskravet, men eftersom opsparingen i dette tilfælde ikke har aftagende marginalprodukt, vil økonomien aldrig ramme et steady state, men derimod have en konstant vækstrate.

Spørgsmål 4

Punkt k_0 er vores startpunkt, hvor den samlede opsparing er præcis stor nok til at dække nedslidning af kapitalapparatet og tilvæksten i befolkningen, hvilket betyder at k_t vil forblive i dette punkt i alle perioder.

Der opstår en stigning i k_0 i beskæftigelsesraten. For det første ville der ikke ske nogen ændring i k_0 , da det er forudbestemt og givet fra tidligere kapital og arbejdsstyrke, hvor beskæftigelsesraten var uændret. Altså ændres outputtet ikke i k_0 . Derimod vil der i k_0 (grundet den faste opsparingsrate) blive tilføjet mere kapital og en højere opsparingsrate, hvilket skyldes stigningen i beskæftigelse. Dvs. opsparingen dækker for mere end kompensationskravet og derved vil kapital per arbejdskraft altså bevæge sig fra k_0 til k_1 som var illustreret i første figur 1. Dog ses det at kompensationskravet for nedslidt kapitalapparat er steget i punktet k_1 , men at dette ikke har nogen betydning eftersom både opsparingsrate og arbejdskraft ligeledes er steget. Det betyder at på længere sigt vil økonomien konvergere mod et nyt og højere steady state k^* , som kan ses i figur 3 nedenunder.



Spørgsmål 5

Begynder først med k^* , hvor vi har fået givet at $k^* = K_{t+1} - K_t$ så vi gør følgende:

$$K_{t+1} - K_t = \frac{1}{1+n}(sB\lambda^{1-\alpha}k_t^\alpha(1-\delta)k_t) - k_t$$
$$k_{t+1} = \frac{(sB\lambda^{1-\alpha}k_t^\alpha)(1-\delta)k_t - k_t(1+n)}{1+n}$$

Dette sættes lig nul, fordi dette er punktet hvor k^* opstår

$$\frac{1}{1+n}(sB\lambda^{1-\alpha}k_t^\alpha)(1-\delta)k_t - k_t(1+n) = 0$$

$$sB\lambda^{1-\alpha}k_t^\alpha = k_t^{1-\alpha}$$

$$\frac{sB\lambda^{1-\alpha}}{(n+\delta)} = k_t^{1-\alpha}$$

$$B^{\frac{1}{1-\alpha}}\lambda^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}} * \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = k_t^*$$

$$B^{\frac{1}{1-\alpha}}\lambda * \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = k_t^*$$

nu kan vi finde y^* ved at indsætte udtrykket for k_t^* i $y = \lambda^{(1-\alpha)}Bk_t^\alpha$

$$\lambda^{1-\alpha}B(B^{\frac{1}{1-\alpha}}\lambda * \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}})^\alpha$$

$$y^* = B^{\frac{1}{1-\alpha}}\lambda * \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Altså er begge udtryk vist.

Spørgsmål 6

Vi starter med at tage $\ln$ på begge sider og differentiere med hensyn til λ

$$\ln(y^*) = \frac{1}{1-\alpha}\ln(B) + \ln(\lambda) + \frac{1}{1-\alpha}\ln(s) - \ln(n+\delta)$$

$$\frac{\partial \ln(y^*)}{\partial \ln(\lambda)} = 1$$

Elasticiteten er 1. Dvs. når beskæftigelsen stiger med 1% så vil BNP/capita stige med 1%.

Spørgsmål 7

Vi tager igen $\ln$ på begge sider og differentiere mht. λ .

$$\ln(y_t) = 1 - \alpha \ln(\lambda) + \ln(B) + \alpha \ln(k_t^{\alpha-1})$$

$$\frac{\partial \ln(y_t)}{\partial \ln(\lambda)} = 1 - \alpha$$

Hvis vi går ud fra at $\alpha = \frac{1}{3}$ så ser vi at:

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Altså er det tydeligt at elasticiteten nu er mindre end i spørgsmål 6. Det vi også kan sige er at når beskæftigelsen stiger med 1% vil BNP/capita stige med 2/3%. Forskellen her er, at i spørgsmål 6 befandt vi også i steady state, hvilket betyder at opsparingen svarer til kompensationskravet. Dermed vil en stigning i beskæftigelsen vil skabe en lige så stor stigning i BNP/capita. Dette er ikke tilfældet i spørgsmål 7, fordi der fortsat er aftagende marginal produkt.